MATEMATICA

La retta

Docente: Prof. Nicola Vigilante | **Classe**: Seconda I.T.T.

Una retta è un insieme infinito di punti allineati nel piano o nello spazio. Nel piano cartesiano, la retta è descritta da una equazione di primo grado nelle due incognite $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$.

Questa equazione può essere data in due forme:

- **IMPLICITA**: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

  a, b, c sono i coefficienti che variando individuano infinite rette del piano

  esempio: $2x + y - 2 = 0$

  $a = 2, \quad b = 1, \quad c = -2$

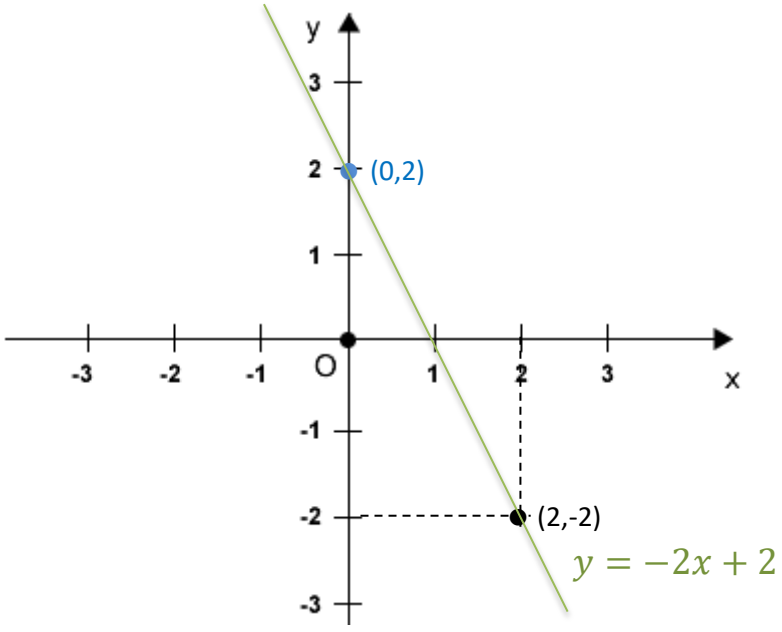
- **ESPLICITA**: $\boldsymbol{y = mx + q}$

  $m = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{a}$

  $\boldsymbol{m}$ è detto **coefficiente angolare della retta** (indica la pendenza della retta)
  $\boldsymbol{q}$ è detta **intercetta** (individua il punto di intersezione con l'asse Y di coordinate: **(0,q)**)

  esempio: $y = -2x + 2$

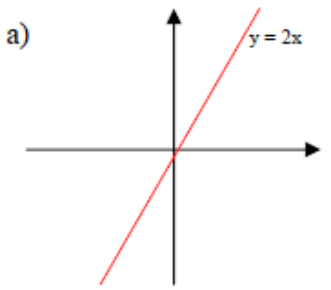
  $m = -2, \quad q = -3$

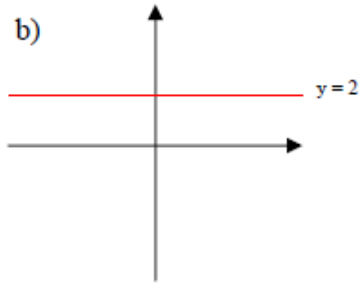


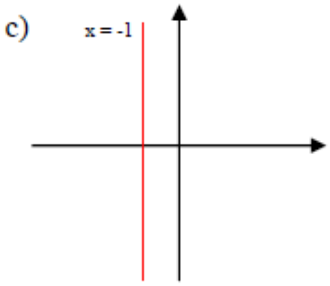
Rette particolari

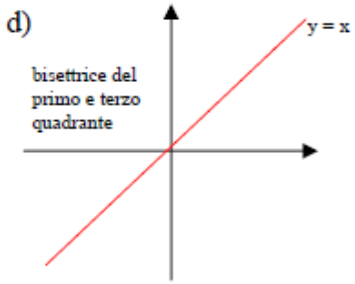
Data la generica retta scritta in forma implicita: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

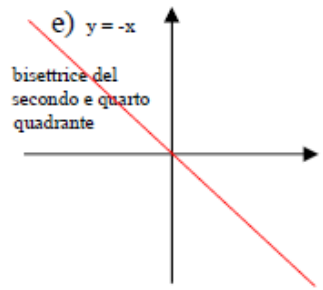
1. Se $\boldsymbol{c = 0}$ $\boldsymbol{(y = mx)}$ la retta passa per l'origine
2. Se $\boldsymbol{a = 0}$ $\boldsymbol{(y = k)}$ la retta è parallela all'asse X (manca il termine con la x)
3. Se $\boldsymbol{b = 0}$ $\boldsymbol{(x = k)}$ la retta è parallela all'asse Y (manca il termine con la y)











La retta d'equazione $y = 0$ è l'asse x, la retta d'equazione $x = 0$ è l'asse y.

Se il coefficiente angolare è positivo la retta è crescente (aumentando il valore della x, aumenta anche quello della y), se è negativo la retta è decrescente (aumentando la x diminuisce la y).

Rappresentazione grafica di una retta

Per rappresentare una retta basta individuare due punti (**per due punti passa una ed una sola retta**); se l'equazione è in forma esplicita uno dei due punti è **(0,q)**, poiché l'intercetta individua il punto di incontro della retta con l'asse Y.

esempio: $3x - y + 2 = 0$

Conviene portare l'equazione in forma esplicita: $y = 3x + 2$

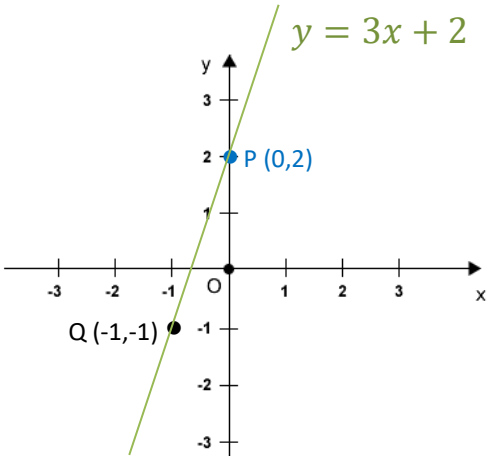
Pertanto, un punto della retta sarà: **P (0,2)**

Per determinare un altro punto della retta è sufficiente assegnare un valore arbitrario alla x, ad esempio:

per $x = -1$

ottengo: $y = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$

Quindi: **Q (-1,-1)** è un altro punto della retta.



Coordinate di appartenenza

Se vogliamo verificare se un punto P (x_o,y_o) appartiene, o no, ad una retta, sostituiamo le sue coordinate nell'equazione. Se l'uguaglianza risulterà verificata, il punto P (x_o,y_o) apparterà alla retta.

esempio:

Data la retta $y = 2x - 3$, verifichiamo se i punti A (1,-1) e B (3,1) appartengono alla retta.

Andiamo a sostituire ascissa e ordinate del punto A (**1**,**-1**) rispettivamente alle incognite x e y della retta:

$$-\mathbf{1} = 2 \cdot (\mathbf{1}) - 3 \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{1} = -1 \quad \Rightarrow$$ A (1,-1) appartiene alla retta

Andiamo a sostituire ascissa e ordinate del punto B (**3**,**1**) rispettivamente alle incognite x ed y della retta:

$$\mathbf{1} = 2 \cdot (\mathbf{3}) - 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1} = 3 \quad \Rightarrow$$ B (3,1) **non** appartiene alla retta

Rette parallele e perpendicolari

Due rette di coefficienti angolari $\boldsymbol{m_1}$ ed $\boldsymbol{m_2}$ sono:

PARALLELE se $m_1 = m_2$ (coefficienti angolari uguali)

PERPENDICOLARI se $m_1 \cdot m_2 = -1$ oppure $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

esempio:

Date le rette:

r: $y = 2x - 3$ $\quad m_r = 2$

s: $y = x - 2$ $\quad m_s = 1$

t: $y = 2x + 4$ $\quad m_t = 2$

z: $y + x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 1$ $\quad m_z = -1$

Confrontando tra loro i coefficienti angolari di ciascuna retta, risulta:

$\boldsymbol{m_r = m_t}$ $\quad$ r // t $\quad$ (La retta r e la retta t sono tra loro parallele)

$\boldsymbol{m_s \cdot m_z = -1}$ $\quad$ s $\perp$ z $\quad$ (La retta s e la retta z sono tra loro perpendicolari)

Retta passante per un punto (fascio di rette)

Per un punto passano infinite rette (ognuna delle quali avrà coefficiente angolare diverso). L'equazione di tutte le rette passanti per un punto dato P (x_o,y_o) sarà:

$$\mathbf{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$$

Conoscendo il coefficiente angolare, si può ricavare l'equazione di una determinata retta.

Esempio:
Sono assegnati i seguenti dati il punto $\mathbf{P\ (-1, +3)}$ ed il coefficiente angolare $\mathbf{m = +2}$
Ricavo l'equazione della retta:

$$y - (+3) = (+2) \cdot (x - (-1))$$

$$y - 3 = 2 \cdot (x + 1)$$

$$y = 2x + 2 + 3$$

$$y = 2x + 5$$

Retta passante per due punti

Per determinare l'equazione della retta passante per due generici punti A (x_1,y_1) e B (x_2,y_2) si utilizza la seguente formula:

$$\frac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{y_2 - y_1}} = \frac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}}$$

La formula si può anche scrivere nella forma:

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)} \qquad \text{in cui} \quad \mathbf{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m}$$

Esempio:
Determinare la retta passante per i punti A (1,2) e B (3,-1).

Consideriamo: A (1,2) = A (x_1,y_1) e B (3,-1) = B (x_2,y_2).

Sostituendo le relative ascisse ed ordinate nella formula si ottiene:

$$\frac{y-2}{-1-2} = \frac{x-1}{3-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-2}{-3} = \frac{x-1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot (y - 2) = -3 \cdot (x - 1)$$

$$2y - 4 = -3x + 3 \quad \Rightarrow \quad 2y - 4 + 3x - 3 = 0$$

$$2y + 3x - 7 = 0 \ \text{(forma implicita)}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \ \text{(forma esplicita)}$$

Intersezione tra due rette

Date due generiche rette: $\boldsymbol{y = m_1 x + q_1}$ e $\boldsymbol{y = m_2 x + q_2}$

si intersecano, il punto che hanno in comune si ottiene risolvendo il sistema formato dalle due rette:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = m_1 x + q_1} \\ \boldsymbol{y = m_2 x + q_2} \end{cases}$$

I principali metodi per risolvere un sistema di equazioni lineari sono: Metodo del Confronto, Metodo di Sostituzione, Metodo di Riduzione (o di addizione e sottrazione), Metodo di Cramer.

CONDIZIONI		**IL SISTEMA È**	
$m_1 \neq m_2$	$q_1 \neq q_2$	DETERMINATO	Le rette sono incidenti
$m_1 = m_2$	$q_1 \neq q_2$	IMPOSSIBILE	Le rette sono parallele
$m_1 = m_2$	$q_1 = q_2$	INDETERMINATO	Le rette sono coincidenti

Esempio:
Date le rette di equazione:

r: $2x - y + 1 = 0$ ⇨ $y = 2x + 1$

s: $x + y - 7 = 0$ ⇨ $y = -\mathrm{x} + 7$

Essendo:

$m_1 \neq m_2$ $q_1 \neq q_2$

$2 \neq -1$ $1 \neq 7$

Il Sistema è DETERMINATO.
Le rette sono incidenti.

$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$ Usando il Metodo di Sostituzione, ricavo x dalla seconda equazione: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ \boldsymbol{x = -\mathrm{y} + 7} \end{cases}$

Risolvendo:

$\begin{cases} 2 \cdot (-\mathbf{y} + 7) - y + 1 = 0 \\ \boldsymbol{x = -\mathrm{y} + 7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\mathrm{y} + 14 - y + 1 = 0 \\ x = -\mathrm{y} + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3\mathrm{y} = -14 - 1 \\ x = -\mathrm{y} + 7 \end{cases}$

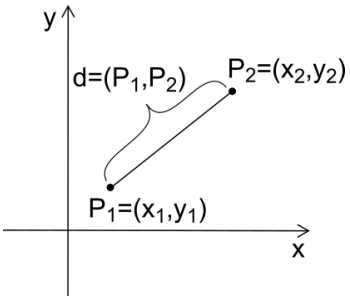
$\rightarrow \begin{cases} -3\mathrm{y} = -15 \\ x = -\mathrm{y} + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{y} = \frac{-15}{-3} = 5 \\ x = -5 + 7 = 2 \end{cases}$

$\mathbf{P(2,5)}$
è il punto di intersezione tra le due rette r ed s

Distanza tra due punti

La formula per calcolare la distanza d tra due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ in un piano cartesiano è:

$$\boldsymbol{d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$



Esempio: la distanza tra i punti $\mathbf{P_1}$ (1,1) e $\mathbf{P2}$ (5,4) è:

$$d = (5-1)^2 + (4-1)^2 = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Questa formula deriva direttamente dal **Teorema di Pitagora**, considerando il segmento che unisce i due punti come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

Nel piano cartesiano, la **distanza tra due punti allineati** in modo orizzontale o verticale si calcola semplicemente facendo la differenza delle coordinate corrispondenti:

Distanza tra due punti verticali (stessa ascissa): $Distanza\ (d) = |y_2 - y_1|$

Esempio: tra i punti A(3,1) e B(3,8) la distanza è : $d = |8 - 1| = 7$

Distanza tra due punti orizzontali (stessa ordinata): $Distanza\ (d) = |x_2 - x_1|$

Esempio: tra i punti A(4,1) e B(4,-3) la distanza è : $d = |(-3) - 4| = |-7| = 7$

Distanza di un punto da una retta

Per calcolare la distanza di un punto P (x_o,y_o) da una retta $ax + by + c = 0$ (FORMA IMPLICITA) si utilizza la formula:

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Per calcolare la distanza di un punto P (x_o,y_o) da una retta $y = m \cdot x + q$ (FORMA ESPLICITA) si utilizza la formula:

$$d = \frac{|y_0 - m \cdot x_0 - q|}{\sqrt{1 - m^2}}$$

Esempio:
Dato il punto **P (3;-1)** e la retta di equazione $3x + 4y - 1 = 0$ utilizzo la formula:

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|3 \cdot \mathbf{3} + 4 \cdot (\mathbf{-1}) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|9 - 4 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|4|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$