MATEMATICA

Proporzioni

Docente: Prof. Nicola Vigilante | **Classe**: Seconda I.T.T.

Considerando quattro numeri **a, b, c, d** diversi da zero, una **proporzione** è una uguaglianza tra due rapporti.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

esempio:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

Tale uguaglianza possiamo scriverla in questo modo:

$$a : b = c : d$$

esempio:

$$1 : 4 = 2 : 8$$

Tale uguaglianza possiamo leggerla come:
" a *sta a* b *come* c *sta a* d "

Quando abbiamo una proporzione scritta in questo modo: $a : b = c : d$

b e c sono detti **Medi**

a e d sono detti **Estremi**

I termini che vengono prima del simbolo della divisione (a, c) vengono chiamati gli antecedenti.

I termini che si trovano dopo il simbolo della divisione (b, d) vengono chiamati i conseguenti .

PROPRIETÀ FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

In una proporzione $a : b = c : d$
"il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi"

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Esempio, data la proporzione:

$1 : 4 = 2 : 8$ ⇨ $4 \cdot 2 = 1 \cdot 8$

Esercizi

1. **Calcolare il valore del termine mancante nella seguente proporzione.**

$$15 : 12 = x : 4$$

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni:

"il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi"

$$12 \cdot x = 15 \cdot 4$$

Tale espressione risulta essere una semplice equazioni di primo grado nell'incognita x.

Per ricavare la x basta dividere entrambi i membri per 12:

$$\frac{12 \cdot x}{12} = \frac{15 \cdot 4}{12}$$

$$x = \frac{15 \cdot 4}{12} = 15 \cdot \frac{1}{3} = 5$$

$$x = 5$$

2. **Calcolare il valore del termine mancante nella seguente proporzione.**

$$18 : 6 = 6 : x$$

Questa volta l'incognita x è un estremo. Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni:

"il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi"

$$18 \cdot x = 6 \cdot 6$$

Tale espressione risulta essere una semplice equazioni di primo grado nell'incognita x, e per ricavare x ci basta dividere eentrambi i membri per 18:

$$\frac{18 \cdot x}{18} = \frac{6 \cdot 6}{18}$$

$$x = \frac{6 \cdot 6}{18} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$x = 2$$

3. **Maria vuole preparare 20 meringhe. La ricetta che gli ha dato la sua nonna prevede che, per fare 12 meringhe, si usano 150 grammi di zucchero e l'albume di 3 uova. Quanti grammi di zucchero e quante uova servono a Maria?**

   Dai dati della ricetta si può affermare che se volessi raddoppiare il numero di meringhe da produrre (24) basta raddoppiare sia i grammi di zucchero e sia il numero di uova. Nel nostro caso specifico, utilizzando le proporzioni, indichiamo con:

   x = grammi di zucchero
   y = numero di uova
   } per preparare 20 meringhe

   $$150 : 12 = x : 20$$

   $$3 : 12 = y : 20$$

   Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni:

   $$12 \cdot x = 150 \cdot 20$$

   $$12 \cdot y = 3 \cdot 20$$

   Svolgendo i calcoli:

   $$\textbf{\textit{grammi di zucchero}} \quad x = \frac{150 \cdot 20}{12} = 150 \cdot \frac{5}{3} = 250$$

   $$\textbf{\textit{numero di uova}} \quad y = \frac{3 \cdot 20}{12} = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$$

   Per preparare 20 meringhe Maria avrà bisogno di 250 grammi di zucchero e di 5 uova.

Altre proprietà delle proporzioni

Consideriamo quattro numeri **a, b, c, d** diversi da zero in proporzione, cioè:

$$a : b = c : d$$

Il rapporto tra i primi due numeri **a** e **b** è uguale al rapporto tra **c** e **d**.

b e **c** sono detti Medi

c e **d** sono detti Estremi

a e **c** vengono chiamato Antecedenti

b e **d** vengono chiamato Conseguenti

Data una proporzione: $a : b = c : d$ $\quad 1 : 4 = 2 : 8$

Applicando le seguenti proprietà otteniamo delle proporzioni altrettanto valide (cioè il rapporto tra i primi due numeri è uguale al rapporto tra gli altri due):

Proprietà dell'invertire	Scambiando ogni **Antecedente** con il suo **Conseguente**	$b : a = d : c$	$4 : 1 = 8 : 4$
Proprietà del permutare	Scambiando tra loro sia i **medi** e sia gli **estremi**	$a : c = b : d$	$1 : 2 = 4 : 8$
		$d : b = c : a$	$8 : 4 = 2 : 1$
Proprietà del comporre	La somma del primo e secondo termine sta al primo o al secondo come la somma del terzo e quarto termine sta al terzo o al quarto	$(a + b) : a = (c + d) : c$	$5 : 1 = 10 : 2$
		$(a + b) : b = (c + d) : d$	$5 : 4 = 10 : 8$
Proprietà dello scomporre	La differenza tra il primo e secondo termine sta al primo o al secondo come la differenza tra il terzo e quarto termine sta al terzo o al quarto	$(a - b) : a = (c - d) : c$	$-3 : 1 = -6 : 2$
		$(a - b) : b = (c - d) : d$	$-3 : 4 = -6 : 8$
		(con $a \geq b$, $c \geq d$ **)**	

Le proprietà indicate possono risultare utili per risolvere alcuni quesiti.

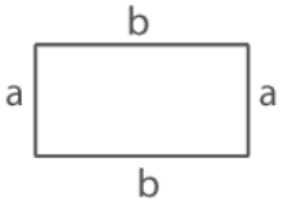
4. **In un rettangolo il rapporto tra le lunghezze di due lati è $\frac{3}{4}$ e la loro somma è 14 cm. Quanto sono lunghi i due lati?**

Indicando con **a** e con **b** i due lati del rattangolo possiamo scrivere:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

oppure:

$$\boldsymbol{a : b = 3 : 4}$$



Inoltre: $\boldsymbol{a + b = 14}$

Volendo risolvere il quesito sfruttando le proprietà delle proporzioni, possiamo applicare la **proprietà del comporre**:

$$\boldsymbol{(a + b) : a = (3 + 4) : 3}$$

Essendo $\boldsymbol{a + b = 14}$

$$\boldsymbol{14 : a = 7 : 3}$$

Applicando la <u>proprietà fondamentale delle proporzioni</u>:

"il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi"

$$a \cdot 7 = 14 \cdot 3$$

$$\frac{a \cdot 7}{7} = \frac{14 \cdot 3}{7}$$

$$a = 2 \cdot 3$$

$$a = 6$$

Sapendo che $\boldsymbol{a + b = 14}$ sarà:

$$b = 14 - a$$

$$b = 14 - 6$$

$$b = 8$$

Le due lunghezze cercate sono:

$$a = 6\ cm\ , b = 8\ cm$$

5. Trova due numeri il cui rapporto è $\frac{7}{5}$ e che hanno per differenza 16?

Indicando con **a** e con **b** i due numeri possiamo scrivere:

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$$

oppure:

$$\boldsymbol{a : b = 7 : 5}$$

Inoltre: $\boldsymbol{a - b = 16}$

Volendo risolvere il quesito sfruttando le proprietà delle proporzioni, possiamo applicare la **proprietà dello scomporre**:

$$\boldsymbol{(a - b) : a = (7 - 5) : 7}$$

Essendo $\boldsymbol{a - b = 16}$

$$\boldsymbol{16 : a = 2 : 7}$$

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni:

$$a \cdot 2 = 16 \cdot 7$$

$$\frac{a \cdot 2}{2} = \frac{16 \cdot 7}{2}$$

$$a = 8 \cdot 7$$

$$a = 56$$

Dato che $a - b = 16$

$$-b = 16 - a$$

$$b = a - 16$$

$$b = 56 - 16$$

$$b = 40$$

6. **Una soluzione chimica deve essere preparata miscelando soluto (x) e solvente (y) nel rapporto 1 : 3. Con 2,4 cL di solvente, quanti cL di soluzione è possibile preparare?**

Indicando con **x** il **soluto** e con **y** il **solvente** possiamo scrivere:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

oppure:

$$\boldsymbol{x : y = 1 : 3}$$

Essendo il solvente $\boldsymbol{y = 2,4\ cL}$, sarà:

$$\boldsymbol{x : 2,4 = 1 : 3}$$

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni:

$$x \cdot 3 = 2,4 \cdot 1$$

$$x = \frac{2,4 \cdot 1}{3} = 0,8\ cL$$

La soluzione essendo formata da un soluto ed un solvente, determino i cL di soluzioneche posso preparare:

$$\boldsymbol{x + y = 2,4\ cL + 0,8\ cL = 3,2\ cL}$$

Osservazione:

Vi è un metodo alternativo per risolvere il quesito.

il soluto x ed il solvente y sono nel rapporto $1:3$. Essendo la soluzione chimica data dalla somma di soluto più solvente qual è il rappoto tra soluzione e solvente?

Sarà:

$$soluzione : solvente = 4 : 3$$

$$(x + y) : solvente = 4 : 3$$

Essendo il solvente $\boldsymbol{y = 2,4\ cL}$, sarà:

$$(x + y) : 2,4 = 4 : 3$$

$$(x + y) = \frac{2,4 \cdot 4}{3} = 3,2\ cL$$