MATEMATICA

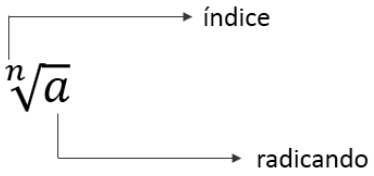
RADICALI

Docente: Prof. Nicola Vigilante | **Classe**: Seconda I.T.T.

In matematica, i radicali sono espressioni che coinvolgono radici di numeri, come la radice quadrata o la radice cubica, e sono utilizzati per risolvere equazioni e semplificare espressioni.

Un **radicale** è un'espressione numerica o algebrica definita mediante l'estrazione di radice con un indice intero positivo.

Struttura di un radicale



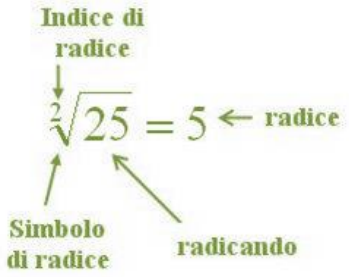
Un radicale è composto da tre elementi principali:

- **Simbolo di radice** $\sqrt{}$
  (indica l'operazione di estrazione di radice)

- **Indice di radice** n
  (numero naturale, diverso da zero, che specifica il "grado" della radice;
  se non è scritto, si intende 2, ossia radice quadrata)

- **Radicando** a
  (numero o espressione che si trova sotto il segno di radice)

Ad esempio, la radice quadrata di 25 è pari a 5 e si scrive nel modo seguente:



RADICI QUADRATE E CUBICHE: DEFINIZIONE, PROPRIETÀ ED ESEMPI

La radice quadrata e la radice cubica sono operazioni inverse delle potenze con esponente 2 e 3.
Guardando la seguente tabella:

1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Se parto da **sinistra,**
elevando al quadrato
ottengo i **numeri a destra**

Se parto da **destra**,
con l'operazione inversa, cioè con l'**estrazione di radice**,
ottengo i **numeri a sinistra**

L'operazione inversa di elevare al quadrato
si dice **RADICE QUADRATA**

E se elevo un numero al cubo? L'operazione inversa di elevare al cubo si dice **RADICE CUBICA**

La radice quadrata

L'operazione inversa dell'elevamento al quadrato di un numero si chiama **estrazione della radice quadrata** di quel numero. La **radice quadrata** di un numero è quel numero che, elevato al quadrato, dà per risultato il numero sotto il segno di radice.

La radice cubica

L'operazione inversa dell'elevamento al cubo di un numero si chiama **estrazione della radice cubica** di quel numero. La **radice cubica** di un numero è quel numero che, elevato al cubo, dà per risultato il numero sotto il segno di radice.

CONDIZIONE DI ESISTENZA DI UN RADICALE

$\sqrt[n]{a}$

Se n è pari ⇨ $\sqrt[dispari]{a}$ ⇨ esiste $\forall\, a \geq 0$

Se n è dispari ⇨ $\sqrt[pari]{a}$ ⇨ esiste $\forall\, a \in R$

Esempi:

- Le condizioni di esistenza del radicale $\sqrt[4]{x-2}$ sono: $x-2 \geq 0$ ossia $x \geq 2$
- Le condizioni di esistenza del radicale $\sqrt[3]{x-2}$ sono: $\forall\, x \in R$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DI UN RADICALE

Prima proprietà fondamentale

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \begin{array}{l} a \geq 0 \text{ se } n \text{ PARI} \\ a \in R \text{ se } n \text{ DISPARI} \end{array}$$

Esempi:

$\left(\sqrt[3]{-5}\right)^3 = -5$ $\qquad$ $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$ $\qquad$ $\left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$

$\left(\sqrt[3]{a-5}\right)^3 = a-5$ $\qquad$ $\left(\sqrt[4]{a-5}\right)^4 = a-5$ se $a-5 \geq 0$ *cioè se* $a \geq 5$

Seconda proprietà fondamentale

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{se } n \text{ PARI} \\ a & \text{se } n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

Esempi:

$\sqrt[4]{a^4} = |a|$ $\qquad$ $\sqrt[3]{5^3} = 5$ $\qquad$ $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

$\sqrt[4]{a^4} = |a| = \begin{cases} +a \; se \; a \geq 0 \\ -a \; se \; a < 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{5^4} = |5| = +(5) = 5$

$\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-1\right)^4} = \left|\sqrt{3}-1\right| = +\left(\sqrt{3}-1\right) = \sqrt{3}-1$ *perchè* $\sqrt{3}-1 \geq 0$

$\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4} = \left|1-\sqrt{3}\right| = -\left(1-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-1$ *perchè* $\sqrt{3}-1 < 0$

OPERAZIONI TRA RADICALI

$$k\sqrt[n]{a}$$

$$a = radicando$$
$$n = indice\ del\ radicale$$
$$k = coefficiente\ del\ radicale$$

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE TRA RADICALI

La moltiplicazione e divisione tra radicali si può effettuare quando i **radicali hanno lo stesso indice**.

$$\sqrt{\mathbf{a}} \cdot \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \qquad \sqrt{\boldsymbol{a}} : \sqrt{\boldsymbol{b}} = \sqrt{\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$$

esempi

$$\sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{80} : \sqrt{5} = \sqrt{80 : 5} = \sqrt{16} = 4$$

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE TRA RADICALI

La somma e la sottrazione tra due o più radicali può essere effettuata tra **radicali simili**. Due **radicali** sono **simili** se hanno la **stessa parte radicalica**. Esempio: $\sqrt{ab}$ è simile a $2\sqrt{ab}$ ma non è simile a $3\sqrt{ac}$, $2\sqrt{ab^2}$

esempi

$$2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

$$6\sqrt{ab^2c} - 4\sqrt{ab^2c} = 2\sqrt{ab^2c}$$

$$6a^2\sqrt{ab^2} - 4a^3\sqrt{ab^2} = (6a^2 - 4a^3) \cdot \sqrt{ab^2}$$

Osservazione importante!!! Le proprietà viste per le moltiplicazioni e divisioni NON VALGONO per l'addizione e la sottrazione!!!

$$\sqrt{\mathbf{9}} + \sqrt{\mathbf{4}} \neq \sqrt{\mathbf{9 + 4}}$$

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} - \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} \neq \sqrt[n]{\mathbf{a - b}}$$

$\sqrt{\mathbf{16}} + \sqrt{\mathbf{9}} = \mathbf{4 + 3 = 7}$ **è diverso dal calcolare** $\sqrt{\mathbf{16 + 9}} = \sqrt{\mathbf{25}} = \mathbf{5}$

PRODOTTI NOTEVOLI CON RADICALI

Somma per differenza

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a^2-b$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$$

Quadrato di un binomio

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\left(a+\sqrt{b}\right)^2=a^2+2a\sqrt{b}+b$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$$

RADICALI COME POTENZE AVENTI ESPONENTI RAZIONALI

Un radicale generico può essere visto come una potenza avente esponente razionale

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

Se il radicando è, a sua volta una potenza, avremo:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

Corrispondenza tra potenze/proprietà delle potenze e radicali/proprietà dei radicali:

potenze	radicali
$a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a}$
$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}=a^{\frac{n+m}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a^{n+m}}$
$a^n:a^m=a^{n-m}$	$\sqrt[n]{a}:\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{n}}:a^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}=a^{\frac{n-m}{n\cdot m}}=\sqrt[n\cdot m]{a^{n-m}}$
$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$
$a^n\cdot a^n=(a\cdot b)^n$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b=}a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

CHE COS'E' UN **QUADRATO PERFETTO?**

Quadrato perfetto è un numero la cui radice quadrata è un numero naturale esatto (ad esempio: 4, 9, 16, 25). Per riconoscerlo o calcolarne la radice, si scompone il numero in **fattori primi**: se tutti gli esponenti sono **pari**, il numero è un quadrato perfetto. **La sua radice si ottiene dimezzando gli esponenti**.

Per verificare che un numero è un quadrato perfetto devo eseguire i seguenti passi:

- Scomporre il numero in fattori primi;
- Se i fattori della scomposizione hanno TUTTI esponenti PARI allora si tratta di un quadrato perfetto.

Esempi:

Scomponendo 324 in fattori primi ottengo $324 = 2^2 \cdot 3^4$. Gli esponenti dei fattori primi sono pari, pertanto 324 **è un quadrato perfetto**.

Scomponendo 84 in fattori primi ottengo $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Gli esponenti dei fattori primi 3 e 7 sono dispari, pertanto 84 **non è un quadrato perfetto**.

Scomponendo 400 in fattori primi ottengo $400 = 2^4 \cdot 5^2$. Gli esponenti dei fattori primi sono pari, pertanto 400 **è un quadrato perfetto**.

Calcolo della Radice Quadrata di un Quadrato Perfetto

Esempio con 144.

Scomponendo 144 in fattori primi ottengo $144 = 2^{\mathbf{4}} \cdot 3^{\mathbf{2}}$. Dimezzando gli esponenti sarà:

$$\sqrt{144} = 2^{\mathbf{2}} \cdot 3^{\mathbf{1}} = 4 \cdot 3 = 12$$

Esempio con 324.

Scomponendo 324 in fattori primi ottengo $324 = 2^{\mathbf{2}} \cdot 3^{\mathbf{4}}$. Dimezzando gli esponenti sarà:

$$\sqrt{144} = 2^{\mathbf{1}} \cdot 3^{\mathbf{2}} = 2 \cdot 9 = 18$$

RIDUZIONE DI PIÙ RADICALI ALLO STESSO INDICE

Per ridurre più radicali allo stesso indice occorre:

1. semplificare i radicali
2. determinare il m.c.m. degli indici dei radicali
3. applicare la proprietà invariantiva in modo da trasformare ciascun radicale in uno equivalente avente per indice il m.c.m. degli indici dei radicali.

Esempi

1. $\left(\sqrt[3]{3a^4}\ ;\ \sqrt[2]{5}\right) \Rightarrow$ m.c.m. $(3;2) = 6 \Rightarrow \left(\sqrt[3\cdot2]{(3a^4)^2}\ ;\sqrt[2\cdot3]{5^3}\right) \Rightarrow \left(\sqrt[6]{(3a^4)^2}\ ;\sqrt[6]{5^3}\right)$

2. $\left(\sqrt[6]{9a^8}\ ;\ \sqrt[24]{8a^6}\right) \Rightarrow \left(\sqrt[6]{3^2a^8}\ ;\ \sqrt[24]{2^3a^6}\right) \Rightarrow \left(\sqrt[3]{3a^4}\ ;\ \sqrt[8]{2a^2}\right)$
   $\Rightarrow$ m.c.m. $(3;8) = 24 \Rightarrow \left(\sqrt[3\cdot8]{(3a^4)^8}\ ;\sqrt[8\cdot3]{(2a^2)^3}\right) \Rightarrow \left(\sqrt[24]{(3a^4)^8}\ ;\sqrt[24]{8a^6}\right)$

3. $\left(\sqrt{a}\ ;\ \sqrt[4]{a^3}\ ;\ \sqrt[12]{a^5}\right) \Rightarrow$ m.c.m. $(2;4;12) = 12$ con C.E. $a \geq 0$ $(indice\ pari\ della\ radice)$
   $\Rightarrow \left(\sqrt[2\cdot6]{a^6}\ ;\ \sqrt[4\cdot3]{(a^3)^3}\ ;\ \sqrt[12]{a^5}\right) \Rightarrow \left(\sqrt[12]{a^6}\ ;\ \sqrt[12]{a^9}\ ;\ \sqrt[12]{a^5}\right)$

CONFRONTO DI RADICALI

Fra due radicali positivi aventi lo stesso indice, il maggiore è quello che ha il radicando maggiore.

Esempi

1. $\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{7}$
2. $\sqrt[7]{3} < \sqrt[7]{5}$
3. $\left(\sqrt[6]{3}\ ;\ \sqrt[4]{2}\right) \Rightarrow$ m.c.m. $(6;4) = 12 \Rightarrow \left(\sqrt[12]{3^2}\ ;\ \sqrt[12]{2^3}\right) \Rightarrow \sqrt[12]{3^2} > \sqrt[12]{2^3}$
4. $\left(\sqrt[7]{3}\ ;\ \sqrt[4]{2}\right) \Rightarrow$ m.c.m. $(7;4) = 28 \Rightarrow \left(\sqrt[28]{3^4}\ ;\ \sqrt[28]{2^7}\right) \Rightarrow \sqrt[28]{3^4} < \sqrt[28]{2^7}$

RAZIONALIZZAZIONE

Lo scopo della razionalizzazione è quello di **eliminare i radicali dai denominatori** di eventuali frazioni algebriche.

CASO 1 - RAZIONALIZZAZIONE DI DENOMINATORI RADICALI QUADRATICI $\sqrt{a}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il radicale quadratico $\sqrt{a}$ che figura a denominatore.

Esempi:

$$\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{7}{2\sqrt{5}} = \frac{7}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{2\sqrt{5 \cdot 5}} = \frac{7\sqrt{5}}{2\sqrt{25}} = \frac{7\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$$

$$\frac{2x + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2x + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2x\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2x\sqrt{2} + 2}{2 \cdot 2} = \frac{2(x\sqrt{2} + 1)}{4} = \frac{(x\sqrt{2} + 1)}{2}$$

CASO 2 - RAZIONALIZZAZIONE DI DENOMINATORI RADICALI NON QUADRATICI $\sqrt[n]{a^p}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il radicale $\sqrt[n]{a^{n-p}}$

Esempi:

$$\frac{4}{\sqrt[7]{9}} = \frac{4}{\sqrt[7]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{3^{7-2}}}{\sqrt[7]{3^{7-2}}} = \frac{4\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2 \cdot 3^5}} = \frac{4\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2 \cdot 3^5}} = \frac{4\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^7}} = \frac{4\sqrt[7]{3^5}}{3}$$

$$\frac{4}{\sqrt[7]{8}} = \frac{4}{\sqrt[7]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^{7-3}}}{\sqrt[7]{2^{7-3}}} = \frac{4\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3 \cdot 2^4}} = \frac{4\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3 \cdot 2^4}} = \frac{4\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{4\sqrt[7]{16}}{2} = 2\sqrt[7]{16}$$

CASO 3 - RAZIONALIZZAZIONE DI DENOMINATORI IN CUI COMPARE LA SOMMA O LA DIFFERENZA DI DUE RADICALI QUADRATICI $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il **radicale <u>coniugato</u>** $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

$$\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = (\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

$$\frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{6 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{6 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = 3 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})$$